유한과 무한

대 상

중학교 1학년

개 요

우리가 일상생활에서 사용하는 용어인 유한과 무한에 대한 엄밀한 수학적인 의미를 다루어 본다.

학 습 목 표

지식 – 수의 체계.
– 무한과 유한의 엄밀한 의미
– 유한한 수와 무한한 수의 구분.

탐구 – **활동1** : 일대일 대응과 예제.
활동2 : 길이가 다른 두 선분 위에 있는 점의 개수를 비교하는 방법.
활동3 : 자연수와 일대일 대응이 존재하지 않는 무한집합.

태도 – 일대일 대응을 통한 무한과 유한의 엄밀한 의미를 익힌다.

준비물

교사 – 학습지, 컴퓨터
학생 - 학습지

지 도 계 획

1교시(20분)	유한과 무한에 대한 생각과 사전적 정의를 찾아보고 비교하여 정확한 정의를 한다.	20분
2교시(60분)	활동1. 일대일 대응과 예제	60분
3교시(50분)	활동2. 길이가 다른 두 선분 위에 있는 점의 개수를 비교하는 방법	60분
4교시(60분)	활동3. 자연수와 일대일 대응이 존재하지 않는 무한집합	40분
	무한집합을 분류할 수 있는 방법으로 자연수와 일대일 대응	20분

교 수 방 법

교실 수업, 활동 학습, 설명식 수업

유한과 무한

교실수업으로 운영되고, 교사의 강의와 학생들의 활동이 적절한 조화를 이룬다.

유한과 무한의 정의

1. 유한과 무한의 나만의 정의:

1. 학생들 각각의 정의를 발표해 보고, 서로 의견을 나눠보도록 한다.

2. 모든 정의를 적어보고 서로 비교하면서 잘된 점과 잘못된 점을 학생 스스로 찾아보게 한다.

2. 무한에 대한 나의 지식은? (생각하는 대로 선택해 보시오.)

A	B	같다	다르다
양의 짝수	양의 홀수	( )	( )
직선 위의 모든 점	자연수	( )	( )
선분 위의 모든 점	자연수	( )	( )
자연수	양의 짝수	( )	( )
자연수	유리수	( )	( )
자연수	정수	( )	( )
정수	실수	( )	( )
선분 위의 모든 점	직선 위의 모든 점	( )	( )
선분 위의 모든 점	정사각형 내의 모든 점	( )	( )
직선 위의 모든 점	정사각형 내의 모든 점	( )	( )

3. 설명

유한과 무한의 정의:

유한과 무한을 정의하기 전에 우리는 자연수의 존재를 가정하여야 한다.
자연수의 집합(=확정된 것들의 모임)은 수 1, 2, 3, 4, ... 등과 같은 수들의 모임이고, 이를 다음과 같이 나타낸다.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$$

정의: 어떤 집합이 **유한하다**는 것은 다음 예와 같이 하나의 자연수에 대하여 일대일 대응이 있다는 것이다. 여기서 **일대일 대응**이란 하나의 원소에 정확히 하나의 원소가 빠짐없이 서로 대응되는 것을 말한다.

예: {2, 5, 6, 7}은 유한이다. 왜냐하면 자연수 4에 대하여 다음과 같은 일대일 대응이 있다. 이 경우에 우리는 '이 집합의 개수가 4이다'라고 한다.

$$1 \leftrightarrow 2,\ 2 \leftrightarrow 5,\ 3 \leftrightarrow 6,\ 4 \leftrightarrow 7$$

정의: 유한하지 않은 집합은 **무한하다**고 한다.

칸토르(Georg Cantor, 1845~1918)는 다음과 같이 자연수와 짝수의 일대일 대응을 생각하였다.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**…**
↕	**↕**	**↕**	**↕**	**↕**	
2	**4**	**6**	**8**	**10**	**…**

각 자연수마다 그 수에 2를 곱한 수를 짝을 지으면 어느 쪽도 모자라지 않는다. 또한 자연수와 홀수, 자연수와 3의 배수에 대해서도 같은 방법으로 생각하면 "두 집합의 개수가 같다"라는 것을 알 수 있다고 한다. 칸토르는 이러한 방법으로 무한집합의 개수를 셀 수 있다고 생각하였다.

무한을 셈하는 방법으로 칸토르가 선택한 것은 원소의 개수를 하나하나 비교하는 아주 간단한 방법이다.

활동1. 자연수, 정수, 그리고 유리수의 개수 비교

<자연수와 정수의 개수 비교>

자연수와 정수의 개수를 비교하기 위해서는 둘 사이의 일대일 대응을 찾아야 한다.

<자연수와 양의 유리수의 개수 비교>

활동2. 길이가 다른 두 선분의 점들 사이에 일대일 대응

위의 그림에서 선분 AB와 선분 CD 위에 있는 점들을 일대일 대응시킬 수 있을까?

정의: 두 집합 사이에 일대일 대응이 존재할 때 우리는 두 집합이 **같은 기수**(cardinality)를 갖는다고 한다.

예를 들어, 두 집합 {철수, 영희}와 {1, 2}는 같은 기수를 갖는다. 또한 자연수들의 집합과 양의 짝수들의 집합은 같은 기수를 갖는다. 다음을 참고하자.

$$1 \leftrightarrow 2,\ 2 \leftrightarrow 4,\ 3 \leftrightarrow 6,\ 4 \leftrightarrow 8,\ \cdots$$

유한한 두 집합 사이는 간단히 같은 기수를 갖는지 또는 갖지 않는지를 쉽게 판단할 수 있다. 그러나 무한집합의 경우는 어떨까? 자연수는 무한집합이다. 그러면 모든 무한한 집합은 자연수와 같은 기수를 가질까?

활동3. 자연수와 실수의 기수

기호알기

자연수의 기수를 $\aleph_0$(aleph null)으로 표시한다. 자연수와 유리수는 활동 1에서 보았듯이 같은 기수를 갈는 것을 알 수 있다. 따라서 두 집합의 기수는 같은 기호를 사용한다. 이제 자연수와 실수의 기수에 대해 자신의 생각을 적어보시오.

활동4. 무한집합의 성질

유한의 경우에서 '전체는 부분보다 크다'라는 것이 당연하다. 그러나 이것이 무한의 경우에도 성립할까? 각자의 생각을 말하여 보자.

힐베르트의 문제:

어느 날 밤 한 손님이 그 호텔에 도착했을 때, 그 호텔의 모든 방에 손님이 묵고 있었다. 유한개의 방이 있는 호텔이라면 이제 도착한 손님은 다른 호텔을 찾아가야 할 것이다. 그런데 무한개의 방을 소유한 호텔의 종업원인 힐베르트는 잠시 생각하던 끝에 새로 온 손님에게 빈 방을 마련할 수 있겠다고 한다. 그는 객실로 올라가 모든 투숙객들에게 정중하게 부탁을 한다. "죄송하지만 손님들께서는 옆방으로 한 칸씩만 이동해 주시기 바랍니다." 이해심이 많은 손님들은 힐베르트의 부탁을 잘 들어주어 1호실 손님은 2호실로, 2호실 손님은 3호실로 .. 등과 같이 이동하였다. 잠시 뒤 이동은 끝났다. 기존의 투숙객들은 모두 옆방으로 옮겨갔으며, 자기 방을 못 찾아 헤매는 사람은 없었다. 그리고 새로 온 손님은 비어있는 1호실로 들어가 투숙할 수 있었다. (가능할까?)

다음날 밤, 호텔에는 더욱 곤란한 문제가 발생하였다. 투숙객이 방을 모두 점거하고 있는 상태에서, 무한히 긴 기차를 타고 온 무한히 많은 손님들이 새로 도착한 것이다. 그런데 힐베르트는 당황하기는 보다는 무한히 많은 숙박료를 더 받을 수 있다고 생각하며 혼자서 쾌재를 불렀다. 그는 곧 객실에 안내 방송을 내보냈다.

1. 힐베르트는 안내방송을 어떻게 했을까? (힐베르트의 안내방송대로 행동한 손님들은 방을 빼앗긴 사람도 없고 방을 배정받지 못한 사람도 없다.)

*학생들의 다양한 답을 기준으로 결론을 이끌어 낸다. "손님 여러분, 죄송하지만 현재 묵고 계신 객실 번호에 2를 곱해서, 그 번호에 해당되는 객실로 모두 옮겨주시기 바랍니다. 감사합니다!" 이리하여 1호실 손님은 2호실로, 2호실 손님은 4호실로, 등등 모두 이동을 마쳤다. 자기 방을 빼앗긴 손님은 하나도 없으며, 어느새 호텔에는 무한개의 빈 객실이 생긴 것이다.

2. 이제 무한끼리의 계산은 어떻게 되는지에 대해 같이 생각해 보시오.

<무한 + 1 = 무한 + 2 = … = 무한 + 무한 = 무한 × 무한 = 무한>

3. 문제해결

무한개의 방을 갖춘 힐베르트 호텔의 명성이 자자해지자, 우후죽순처럼 유사한 호텔이 생겨났다. 힐베르트 호텔 2호점, 3호점, 4호점, 등이 차례로 생기더니, 급기야

무한개의 힐베르트 호텔 분점들이 생겼다. 모든 힐베르트 호텔에는 손님이 꽉꽉 들어차 있었는데, 힐베르트 호텔 단합대회 때문에 모든 손님이 힐베르트 호텔 본점(1호점)에 모여 방을 내달라고 요구하기에 이르렀다. 과연 힐베르트 호텔은 이번에도 모든 손님들에게 방을 내줄 수 있을까?

기호알기

'무한대'라는 것은 어떤 값을 뜻하는 것이 아니라 '한없이 커지는 상태'를 나타내는 것이다. 유한한 값이 아니므로 서로 크기를 비교할 수도 없으며, 연산을 할 수도 없다.

이것을 기호로 ∞로 나타내며, **무한대**(infinity)라고 읽는다.

참고: 무한대 기호의 유래 (수학사랑-수학백과사전)
무한대를 나타내기 위해 사용하는 기호는 ∞이다. 이 기호는 1655년에 영국의 수학자 왈리스의 책에서 처음으로 도입되었다. 그러나 이 기호는 한동안 사용되고 있지 않다가 1713년에 스위스의 수학자 야콥 베르누이(Jacob Bernoulli; 1654-1705)의 책에서 다시 사용되었다. 이 책은 야콥 베르누이 사후에 그의 조카인 니콜라스(1세) 베르누이(Nicolaus Bernoulli;1687-1759)가 간행한 것이다.
이 기호는 1000을 나타내는 옛 로마 숫자에서 유래된 것이라고 한다. 이 로마 숫자의 외형(外形)은 C I 또는 CD로 보이는데, 어느 쪽이든 ∞와 아주 유사하다고 볼 수 있다. 이 기호가 비록 1655년에 도입되긴 했으나, 보편적으로 널리 사용된 것은 훨씬 뒤인 18세기 초의 일이다. 그러나 왈리스가 왜 이 기호를 채택했는지는 분명하지 않다. 옛날 속담에 '천리길도 한 걸음부터'라고 할 때의 '천'이 매우 큰 수를 의미한다는 것을 생각해 보면, 아마 당시에도 '천'이라는 수가 매우 큰 수를 의미했기 때문에, 그와 같은 기호를 택했던 것인지도 모른다.
한편, 왈리스가 1000을 나타내는 옛 로마 숫자 ∞를 채택했을 것이라는 추측이 소개되어있는 책도 있다. 그러나 여기서 옛 로마 숫자가 ∞라는 것은 오기(誤記)로 보인다. 또, 기호 ∞가 그리스 알파벳의 마지막 자인 '오메가(omega)'의 소문자 ω에서 유래 되었을 가능성이 있다고도 기술되고 있는데, 오메가는 흔히 '끝'을 나타내는 상징으로 사용되고 있기 때문일 것이다. 또, 외형상 ω 와 ∞가 약간은 닮았다고 할 수 있기에 ω 가 ∞로 변형되었다고 볼 수도 있다. 아마도 이러한 이유에서 ∞가 ω 에서 유래되었다는 추측을 한 것으로 보인다.

수직선 위에서 생각하면 원점에서 오른쪽으로 한없이 멀어지고 있는 상태를 +∞(간단히 ∞)로, 원점에서 왼쪽으로 한없이 멀어지고 있는 상태를 -∞로 나타낸다. 그렇다면 +∞는 임의의 양수보다 큰 값을 갖는 변수인 셈이고, -∞는 임의의 음수보다 작은 값을 갖는 변수인 셈이다.
그럼 $\infty+\infty$는 무엇일까? 커지는 상태가 두 배가 되었다는 뜻인데, 그럼 2∞의 크기가 될까? 앞에서 보았듯이 짝수 전체의 집합과 자연수 집합은 두배 만큼의 차이가 날 것 같이 보이지만 일대일 대응이 존재하는 동등한 집합이었다. 이 경우 두 집합의 농도는 같다! 결국 ∞는 크기가 아니라 커지는 상태를 의미할 뿐이므로, 2∞는 의미가 없다. 그저 $\infty+\infty=\infty$로 나타낼 뿐이며, 이는 커지는 상태의 두 값을 합하면 커지는 상태가 된다라는 의미로 받아들여야 한다.
$\infty\times\infty$의 경우도 마찬가지다. $\infty\times\infty=\infty$인데, 이 경우 앞서 더하는 것보다 훨씬 더 빠른 속도로 커질 것이다.

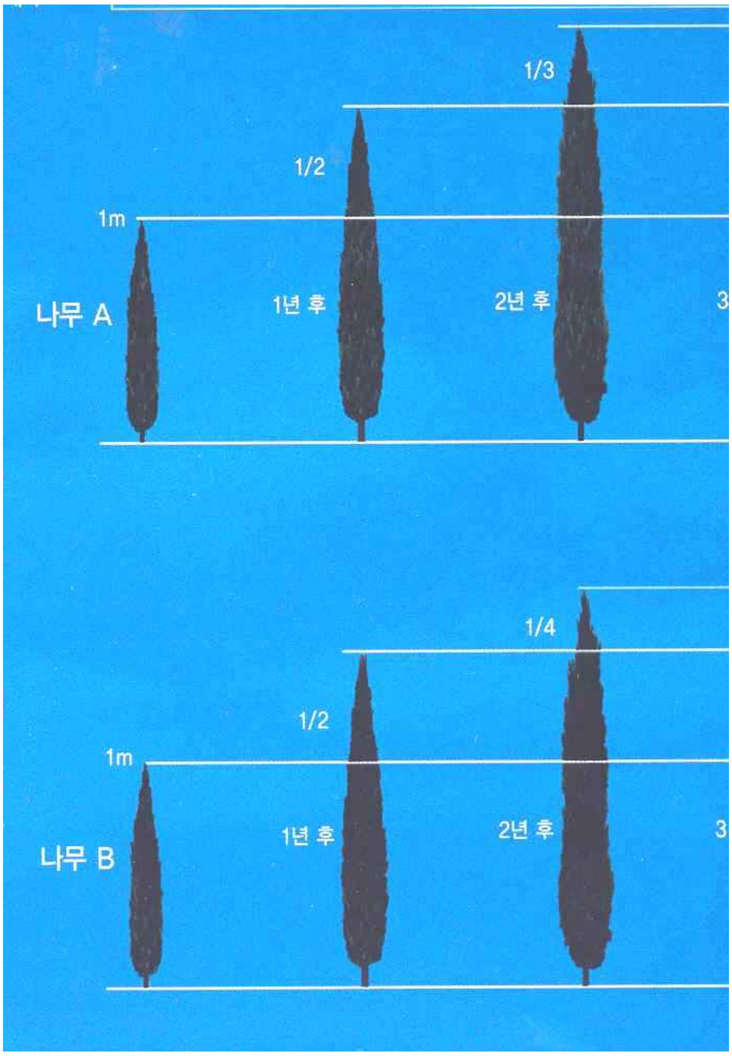
이제 $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ 에 대해서도 생각해 보시오. 먼저 $\infty - \infty$는 생각할 수 없다. $\infty - \infty = 0$이라고 생각하면 안된다. 예를 들어 $2n$은 n이 커짐에 따라 한없이 커지고, n도 마찬가지다. 그런데 $2n - n = n$이므로 $2n, n$이 둘 다 ∞가 된다고 해서 그 둘을 뺀 것이 0이 되지는 않음을 알 수 있다. 그러므로 $\infty - \infty$는 의미 없는 식, 또는 기호로 받아들인다.

$\frac{\infty}{\infty}$는 간단히 말할 수 없다. 경우에 따라 다르기 때문이다. 물론 $\frac{\infty}{\infty} = 1$이라는 생각은 어리석은 것이다. 그러나 때로는 그 식이 성립하는 경우도 있다. 여기서는 앞에서 살펴본, ∞에도 여러 가지가 있다는 점을 감안해야 한다.

활동5. 무한대

어떤 실수들을 무한히 많이 더하면 그 결과도 무한히 큰, 즉 무한대가 될까? 다음 예를 살펴보자.

A, B라는 두 그루의 나무가 있다. 이들의 현재 높이는 1m 이지만 1년이 지날 때마다 조금씩 성장한다. 나무 A는 1년째에 $\frac{1}{2}$m가 자라고, 2년째에는 $\frac{1}{3}$m, 3년째에는 $\frac{1}{4}$m, 4년째에는 $\frac{1}{5}$m 등과 같은 속도로 자란다. 한편 나무 B는 1년째에 $\frac{1}{2}$m가 자라고, 2년째에는 $\frac{1}{4}$m, 3년째에는 $\frac{1}{8}$m, 4년째에는 $\frac{1}{16}$m 등과 같은 속도로 자란다. 이들은 모두 해마다 자라는 길이가 감소되어 가지만, 영원히 계속 자란다는 점에서는 같다. 시간이 무한히 흘러간다고 할 때, 이 두 나무의 높이는 각각 어떤 차이가 나타날까?



1. A 나무의 길이는 어떻게 될까?

$A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n}$ 의 극한이 무한대임을 증명

$(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})>(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})=\frac{1}{2}$

$(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})>(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})=\frac{1}{2}$

$(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16})>(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16})=\frac{1}{2}$

이므로

$A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty$

따라서 A도 무한대로 발산한다.

2. B 나무의 길이는 어떻게 될까?

1) B 나무의 길이를 구하는 식을 찾아보시오.

$B=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$

2) 일정한 규칙을 찾을 수 있는가? 있다면 어떤 규칙인가?

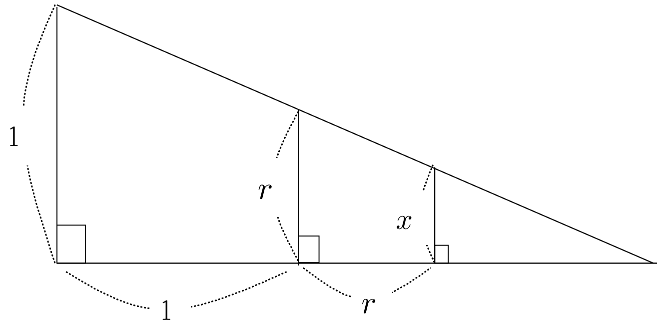
각각의 항이 전항에 $\frac{1}{2}$를 곱하면 다음 항이 나오는 형태이다.

3) 문자를 사용하여 일반화 시켜보시오.

$B=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^4+(\frac{1}{2})^5+\cdots$

$B=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4\ \cdots$

3. 다음 도형을 이용하여 B의 길이를 구해보시오.



1) 위 도형에서 x의 길이를 구해보시오.

2) x를 구하였다면 위의 삼각형을 이용하여 B의 값을 구해보시오.

4. 그렇다면 $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$ 형태는 모두 일정한 값으로 가까이 가는가?

참고

무한에 대한 활동을 마치고, 다음 개념을 생각해 보시오.

- 셀 수 있는 무한 vs 셀 수 없는 무한

무한에도 자연수와 일대일 대응이 가능한 무한과 자연수와 일대일 대응이 불가능한 무한이 있음을 알 수 있었다. 우리는 다음과 같이 정의한다.

자연수와 일대일 대응이 가능한 집합= 셀 수 있는 집합 = 번호를 붙일 수 있다 = 가산집합(Countable Set) = 가부번집합(Denumerable Set)

따라서 우리는 다음을 알 수 있다.

1. 가산집합(비가산집합) : 자연수, 정수, 유리수
2. 비가산집합(비가부번집합): 실수

-처음에 했던 체크리스트이다. 이제 다시 한번 체크해 보시오.

A	B	같다	다르다
양의 짝수	양의 홀수	(　　)	(　　)
직선 위의 모든 점	자연수	(　　)	(　　)
선분 위의 모든 점	자연수	(　　)	(　　)
자연수	양의 짝수	(　　)	(　　)
자연수	유리수	(　　)	(　　)
자연수	정수	(　　)	(　　)
정수	실수	(　　)	(　　)
선분 위의 모든 점	직선 위의 모든 점	(　　)	(　　)
선분 위의 모든 점	정사각형 내의 모든 점	(　　)	(　　)
직선 위의 모든 점	정사각형 내의 모든 점	(　　)	(　　)